

Aplicación del Modelo Copula Opinion Pooling al mercado accionario colombiano

Sebastián Yepes Valencia

Asesor: Javier Pantoja Robayo

Msc en Finanzas
Universidad EAFIT
2019

Resumen

El modelo Copula Opinion Pooling propuesto en Meucci (2005) es una ampliación al modelo de Black-Litterman, en el cual se permite incorporar distribuciones no normales tanto para los retornos de equilibrio como para las visiones. Se aplica este modelo para el mercado accionario colombiano utilizando la distribución T-Student asimétrica para los retornos de equilibrio y el CVaR como medida de riesgo para la optimización de portafolios, y se realiza una comparación de desempeño trimestral en el periodo abril de 2012 a noviembre de 2018 con un índice construido a partir de un subgrupo de acciones tomadas del índice de mercado Colcap (Colcap Ajustado) y con portafolios estimados bajo la metodología Black-Litterman y Media Varianza. Para la expresión de las visiones del inversionista se utilizan las Recomendaciones en Consenso de los analistas publicadas en Bloomberg. Se encuentra que el modelo propuesto obtiene rendimientos superiores a los de los portafolios analizados y vence al mercado (Colcap Ajustado) con un amplio margen respecto al retorno obtenido, a la medida de agregación de valor α , el ratio de información y el drawdown.

Palabras Clave: Copula Opinion Pooling, Media Varianza, Black-Litterman, Colcap.

Clasificación JEL: C1, G11

1. Introducción

A pesar de ser la base del análisis de portafolios, el modelo de media varianza desarrollado a partir de los estudios de Harry Markowitz (1950), John Lintner (1965), Jan Mossin (1966)

y William Sharpe (1964), ha sido criticado en gran medida por las limitaciones de sus supuestos y de la imposibilidad de aplicarlos empíricamente. Roll (1977, 1978, 1979) es el primero en evidenciar las deficiencias del modelo, Green y Hollifield (1992) hacen referencia a la poca diversificación y a los portafolios altamente concentrados obtenidos por este, Best y Grauer (1991) encuentran alta sensibilidad de los portafolios eficientes obtenidos ante cambios en la media de los activos individuales especialmente por errores en su estimación.

Como solución a estas limitaciones se han propuesto en la literatura varios modelos que han permitido obtener portafolios óptimos de manera robusta corrigiendo los errores de estimación de los valores de entrada, la poca diversificación y la alta concentración. Black y Litterman (1990, 1991, 1992) proponen un modelo de gestión de portafolios basado en una estimación Bayesiana de los retornos de equilibrio del mercado y los retornos esperados de los activos. El modelo permite incluir las visiones del inversionista sobre los retornos futuros de cada activo y combinarlos con los de equilibrio. Tiene como pilares teóricos fundamentales el modelo CAPM (Sharpe 1964), la optimización inversa (Sharpe 1974), la estimación Bayesiana, el modelo de Media-Varianza (Markowitz 1952) y el ratio de cobertura universal (Black 1989). Supone que los retornos siguen una distribución Normal.

Meucci (2005, 2006, 2010) propone una extensión al modelo de Black-Litterman en su modelo Copula Opinion Pooling (COP). Ambos modelos permiten la inclusión de la visión del inversionista en el proceso de optimización de portafolios. Ambos modelos parten de una distribución a priori de los retornos y de las visiones para luego obtener una distribución posterior, pero en el modelo COP la distribución a priori puede ser representada por una copula y la distribución de los retornos puede ser de cualquier tipo.

Una de las críticas a los modelos de portafolios propuestos en la literatura está relacionada con el supuesto de normalidad de los retornos de los activos financieros y si los resultados empíricos apoyan dicho supuesto. Mandelbrot (1963) y Fama (1965) son los primeros en analizar el comportamiento empírico de los retornos de los activos, y el exceso de curtosis encontrado los lleva a rechazar la distribución normal y a proponer la distribución Paretiana Estable como modelo estadístico para los retornos de los activos financieros. Las características de los retornos de los mercados financieros son resumidas en la literatura como hechos estilizados (Campbell et al. 1997, McNeil et al. 2005): las series de los retornos financieros son en general no independientes e idénticamente distribuidas, la volatilidad de los retornos no es constante en el tiempo, los retornos absolutos o el cuadrado de los retornos están altamente correlacionados, la distribución de los retornos es leptocúrtica y asimétrica hacia la izquierda donde los eventos extremos son más probables que lo sugerido por la distribución normal (colas pesadas) y los retornos negativos tienen más probabilidad de ocurrencia que los positivos, y los retornos presentan clúster de volatilidad.

La literatura ha propuesto una serie de distribuciones de probabilidad que permiten capturar estas características de los retornos entre las que se encuentran la distribución t-Student, la distribución Alfa-Estable, la distribución Lambda Generalizada, la distribución Exponencial Generalizada, La distribución Hiperbólica Generalizada, la distribución Normal Sesgada, entre otras. Además de encontrar distribuciones que se adecuen a las características empíricas, es importante obtener medidas de riesgo que capturen el comportamiento de las colas y el sesgo de las distribuciones con el fin de no subestimar/sobrestimar el riesgo de cada activo de forma individual y del portafolio en su conjunto. Algunas de las medidas utilizadas en la literatura son el VaR (Value at Risk) y CVaR (Conditional Value at Risk).

El propósito de esta investigación es explicar, analizar y aplicar el modelo propuesto por Meucci (2005,2006,2010), Copula Opinion Pooling, en la gestión de portafolios en el mercado accionario colombiano. Se inicia con una comparación entre el modelo COP, el modelo propuesto por Black y Litterman (1990) y el modelo de Media Varianza, basada en los portafolios óptimos que se obtienen a partir de cada uno.

A partir de lo anterior, se propone una aplicación del modelo para la gestión de portafolios de acciones, utilizando una distribución T-Student Asimétrica para los retornos de los activos y una distribución normal para las visiones del inversionista. Con esto se pretende mostrar cómo incluir distribuciones diferentes a la normal para la distribución del mercado. Para la optimización del portafolio, se utiliza el CVaR como medida de riesgo.

Se espera que utilizando un modelo que permita incorporar las características inherentes de los retornos muestrales, se obtengan resultados en la selección de activos más estables, intuitivos y robustos que los obtenidos con modelos que suponen distribución normal.

El aporte fundamental de este trabajo radica en que pone a prueba el modelo COP en el mercado colombiano, mostrando sus principales características y su forma de cálculo. Para Colombia existen estudios que ponen a prueba modelos alternativos al de media varianza como el modelo Black-Litterman, pero no tienen en cuenta otras distribuciones diferentes a la normal ni otras medidas de riesgo diferentes a la varianza, y en ninguno de ellos se estudia el modelo COP. Segura (2009) realiza una aplicación del modelo BL a los fondos de pensiones obligatorias para la construcción de portafolios óptimos, León y Vela (2011) aplican el modelo BL a las reservas extranjeras, Luna y Tamayo (2015) aplican BL al mercado accionario colombiano y realizan una comparación de desempeño frente al índice Colcap.

Se propone una aplicación del modelo COP al mercado colombiano como una ampliación a los estudios hechos sobre aplicaciones del modelo Black-Litterman, partiendo de la

metodología propuesta en He et al. (2013) y Luna y Tamayo (2015) sobre la expresión de las perspectivas de los inversionistas. Se pretende mostrar que partiendo de la misma base de retornos muestrales y de las mismas visiones de los inversionistas, se pueden obtener resultados diferentes en la asignación de activos y con ellos en los rendimientos futuros de los portafolios.

Esta investigación está organizada de la siguiente forma: en la sección dos se especificará en detalle el modelo COP, su justificación teórica y la revisión literaria pertinente de los estudios que han utilizado esta metodología, así como las diferencias con el modelo de Black Litterman. En la sección 3, se explica la metodología. En la sección 4, se explica en detalle la aplicación empírica del modelo COP. En la sección 5, se llevará a cabo una descripción de los datos y pruebas de normalidad univariadas y multivariadas. La sección 6 presenta los resultados de la selección de activos obtenidos por cada uno de los modelos (COP, BL y Media Varianza) y se hace una evaluación de rendimiento para el periodo analizado basado las principales medidas de desempeño propuestas por el CAPM. La sección 7 concluye.

2. Fundamento Teórico

El fundamento teórico del modelo está basado en Bredeby (2015), Meucci (2005), McNeil et al.(2001).

2.1. Copulas

El coeficiente de correlación de Pearson (y demás coeficientes de correlación lineales) a pesar de ser muy utilizado en la práctica en el análisis de portafolios, presenta numerosas fallas a la hora de medir la correlación y la dependencia entre instrumentos financieros. La dependencia entre dos instrumentos financieros solo puede ser representada correctamente con un coeficiente de correlación lineal si su distribución conjunta es Elíptica. Este coeficiente sólo está definido para pares de variables aleatorias con varianza finita, por lo que no es adecuado utilizarlo para la modelación del riesgo de variables con alta masa de probabilidad en las colas, tal como sucede con los activos financieros.

El concepto de Copula corrige bastante bien estas deficiencias y permite tener una medición de la dependencia entre las variables acorde a lo observado en los hechos estilizados de los retornos de los instrumentos financieros, al medir la dependencia en las colas de la distribución conjunta. Una estimación confiable de las dependencias entre los activos es crucial en la asignación de activos, y requiere el uso de medidas más allá de las matrices de covarianza y las correlaciones.

La Copula describe la estructura de dependencia de las variables en la función de distribución conjunta de la siguiente manera:

Se considera un modelo multivariado $X = (X_1, \dots, X_N)$ con funciones de distribución marginal F_1, \dots, F_N . Dado el vector $U = (U_1, \dots, U_N)$ donde $U_i \sim U(0,1), i = 1, \dots, N$, mediante una transformación cuantil se puede expresar X como

$$X = (F_1^{-1}(U_1), \dots, F_N^{-1}(U_N)) \quad (1)$$

X hereda la dependencia entre sus componentes de U . A la función de distribución C del vector aleatorio U , donde sus componentes están uniformemente distribuidos en $(0,1)$, se le llama Copula.

$$C(u_1, \dots, u_N) = P(U_1 \leq u_1, \dots, U_N \leq u_N), \quad (u_1, \dots, u_N) \in (0,1)^N \quad (2)$$

Se supone (X_1, \dots, X_N) un vector aleatorio con función de distribución F donde $F_k(x) = P(X_k \leq x)$ es continua para cada k . Los componentes del vector $U = (U_1, \dots, U_N) = (F_1(X_1), \dots, F_N(X_N))$ están uniformemente distribuidos en $(0,1)$. La función de distribución C de U es una copula, la copula de X .

$$\begin{aligned} C(F_1(x_1), \dots, F_N(x_N)) &= P(U_1 \leq F_1(x_1), \dots, U_N \leq F_N(x_N)) \\ &= P(F_1^{-1}(U_1) \leq x_1, \dots, F_N^{-1}(U_N) \leq x_N) \\ &= F(x_1, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (3)$$

Copula Gaussiana

La Copula C_R^{Ga} de una distribución normal estándar N -dimensional, con una matriz de correlaciones R , está definida como

$$C_R^{Ga}(u) = P(\Phi(X_1) \leq u_1, \dots, \Phi(X_N) \leq u_N) = \Phi_R^N(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_N)), \quad (4)$$

donde Φ_R^N es la función de distribución de $X \sim N_N(0, R)$ y la Copula C_R^{Ga} es la función de distribución del vector aleatorio $(\Phi(X_1), \dots, \Phi(X_N))$ donde Φ es la función de distribución normal estándar univariada.

Esta Copula presenta una formación simétrica, no tiene dependencia en las colas (“tail dependence”) y no presenta relación de co-movimientos entre las variables en las colas.

Copula t Student

La Copula $C_{v,R}^t$ de una distribución t N-dimensional con $v > 0$ grados de libertad y una matriz de correlación R, está definida como:

$$C_{v,R}^t(u) = P(t_v(X_1) \leq u_1, \dots, t_v(X_N) \leq u_N) = t_{v,R}^N(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_N)) \quad (5)$$

donde $t_{v,R}^N$ es la función de distribución de $X \sim t_N(0, R, v)$. La Copula $C_{v,R}^t$ es la función de distribución del vector aleatorio $(t_v(X_1), \dots, t_v(X_N))$ donde t_v es la función de distribución t student univariada.

Esta Copula presenta una formación simétrica, la dependencia en las colas es idéntica tanto para la cola superior como para la inferior. La relación de co-movimientos entre las variables en las colas está determinada por los grados de libertad y la correlación.

2.2 Modelo Copula Opinion Pooling (COP)

El modelo COP introducido por Meucci (2005,2006) es una extensión al modelo de gestión de portafolios propuesto por Black-Litterman (1991,1992).

El modelo de BL permite combinar las visiones subjetivas del mercado con una distribución anterior, donde le permite al inversionista expresar un número arbitrario de visiones como combinaciones lineales de los valores esperados del mercado para luego obtener la distribución posterior del mercado. Tanto las visiones como el mercado se suponen normalmente distribuidos.

En el modelo COP se elimina el supuesto de normalidad tanto de los retornos como de las visiones, y mediante técnicas de opinion pooling y teoría de copulas permite combinar la distribución anterior al mercado con las visiones del inversionista utilizando distribuciones que permitan capturar las colas pesadas y la asimetría presentes en las distribuciones conjuntas del mercado.

En el modelo BL el inversionista está limitado a expresar sus visiones en base a la distribución normal (“alpha + Ruido gaussiano”), a diferencia del modelo COP donde puede expresarlas con la complejidad deseada utilizando otro tipo de distribuciones (ej: expresar visiones como un rango mediante la distribución uniforme).

En el modelo BL la distribución anterior del mercado (retornos de equilibrio del mercado) es obtenida a partir de los pesos de cada activo en el portafolio de equilibrio (basado en el CAPM) mientras que en el modelo COP la distribución anterior es obtenida a través de

simulaciones Montecarlo en las que se modela la distribución conjunta del mercado utilizando una determinada copula o una determinada distribución multivariada obtenida a partir de las características muestrales de los retornos.

Para iniciar es necesario la representación del mercado que se quiere modelar. Se parte de la distribución del vector N-dimensional del mercado M, la cual puede representar los retornos de una serie de activos. Esta distribución es expresada en términos de la función de densidad:

$$M \sim f_M \quad (6)$$

Esta distribución es combinada con la visión del inversionista acerca de los retornos.

Tal como sucede en BL, el inversionista puede tener $K \leq N$ visiones como combinaciones lineales del vector de retornos del mercado M. En el modelo COP las visiones son expresadas como posibles realizaciones del mercado a diferencia del modelo BL donde son expresadas sobre los parámetros que determinan la distribución del mercado.

Las visiones están representadas por una matriz P con dimensiones K x N : la fila kth de la matriz determina los pesos de la visión kth. Es posible elegir N – K combinaciones lineales donde no hay visiones expresadas. Se crea una matriz P^\perp con dimensiones (N-K)xN. La matriz resultante

$$\bar{P} \equiv \begin{pmatrix} P \\ P^\perp \end{pmatrix} \quad (7)$$

define las visiones ajustadas al mercado. El vector aleatorio N-dimensional

$$V \equiv \bar{P}M \quad (8)$$

es equivalente a la matriz M.

Las visiones corresponden a las primeras K entradas de V. Cada kth visión es expresada en términos de la función de distribución acumulada (CDF):

$$\hat{F}_k(v) \equiv \mathcal{P}_{subj}\{V_k \leq v\}, \quad k = 1, \dots, K \quad (9)$$

La distribución a priori implica también una distribución para cada visión, la cual está representada por su CDF:

$$F_k(v) \equiv \mathcal{P}_{prior}\{V_k \leq v\}, \quad k = 1, \dots, K \quad (10)$$

Normalmente, las visiones del inversionista son diferentes a las distribuciones implícitas en el mercado. Para resolver esta situación el modelo COP acude a técnicas de *opinion pooling*. La CDF posterior es definida como un promedio ponderado:

$$\tilde{F}_k \equiv c_k \hat{F}_k + (1 - c_k) F_k, \quad k = 1, \dots, K \quad (11)$$

donde $c_k \in [0,1]$ representa el nivel de confianza de cada visión determinada exógenamente. Si el nivel de confianza es cero, la distribución posterior es igual a la distribución obtenida del mercado y si es uno la distribución posterior va a estar totalmente modificada por las visiones.

Cuando se conoce la distribución posterior de cada visión luego se pretende determinar la distribución conjunta de las visiones. La distribución conjunta contiene información sobre las distribuciones marginales posteriores de las visiones y la estructura de co-dependencia implícita en la distribución anterior del mercado.

La copula de la distribución posterior de las visiones es heredada de la copula anterior:

$$C \equiv \begin{bmatrix} V1 \\ \vdots \\ V_k \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} F1(V1) \\ \vdots \\ Fk(Vk) \end{bmatrix} \quad (12)$$

La distribución posterior conjunta de las visiones se define:

$$V \equiv \begin{pmatrix} V1 \\ \vdots \\ V_k \end{pmatrix} = d \begin{bmatrix} \widetilde{F1^{-1}}(C1) \\ \vdots \\ \widetilde{Fk^{-1}}(Ck) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Finalmente para determinar la distribución posterior del mercado $M \sim \widetilde{f}_M$, se aplica:

$$\hat{M} = d \bar{P}^{-1} V \quad (14)$$

donde las primeras K entradas de V siguen la distribución posterior (13) y los restantes permanecen inalterados. M luego es utilizado como insumo para la optimización de portafolios.

3. Metodología

Se busca poner a prueba el modelo Copula Opinion Pooling en el mercado accionario colombiano y compararlo con los modelos media varianza y Black Litterman. Los parámetros son estimados en un periodo *Out-of-Sample* de 4 años con una ventana móvil de 3 meses, tomando como periodo inicial Abril 30 de 2008 – Abril 30 de 2012. La ventana se

irá moviendo cada trimestre, donde se van eliminando los primeros tres meses manteniendo siempre la longitud de 4 años de retornos diarios.

Se utilizan los retornos diarios de las acciones del índice Colcap. Las acciones utilizadas para las estimaciones son aquellas que para cada trimestre de cálculo tienen retornos diarios históricos disponibles de 4 años. El número de acciones elegidas varía entre 12 y 15 para cada uno de los trimestres estimados. La motivación para reducir el número de acciones basado en la disponibilidad de datos históricos radica en la importancia que tiene el uso de una cantidad de datos suficiente para las simulaciones Montecarlo que se van a llevar a cabo y que parten del ajuste de una determinada distribución multivariada a los retornos muestrales. Es importante que la muestra permita capturar el comportamiento de los activos durante todo un ciclo económico y bursátil así como capturar tendencias alcistas y bajistas en los precios.

Las ponderaciones del índice Colcap son ajustadas teniendo en cuenta las acciones elegidas en cada trimestre. Sólo se utiliza un tipo de acción por emisor: para Bancolombia se toman los retornos de la acción preferencial, para Gruposura, Grupoargos y Cemargos se toman los retornos de la acción ordinaria. Para los trimestres en los que en el índice Colcap se encontraban ambos tipos de acciones por emisor, se suman las ponderaciones de ambas para realizar los ajustes posteriores. El tipo de acción escogida tiene como fundamento el número de veces que han permanecido en el índice así como su liquidez.

La metodología del Colcap para escogencia entre acciones ordinarias y preferenciales ha variado a lo largo del periodo analizado, por lo que por simplicidad y estabilidad en el cálculo del portafolio benchmark utilizado en la investigación, se opta por elegir la especie que mas veces ha permanecido en el Colcap, la de mayor liquidez y la que cumpla la condición de los 4 años de retornos diarios disponibles desde el inicio del periodo *Out-of-Sample*.

Se construye por tanto un índice Colcap ajustado que será utilizado como benchmark para el análisis de desempeño de los portafolios y como portafolio de equilibrio para el cálculo de la distribución anterior del mercado en el modelo BL.

Cada modelo de portafolio es estimado de forma trimestral en los meses de enero, abril y julio, al cierre del mercado del último día hábil del mes tal como es el procedimiento ejecutado para el índice Colcap. Se inicia en Abril 30 de 2012 y se finaliza en Julio 31 de 2018. Se estima un total de 26 portafolios para cada uno de los modelos. En este periodo se hace una evaluación de desempeño de cada uno de los portafolios teniendo en cuenta las principales medidas de desempeño propuestas por el CAPM: Ratio de Información, R², Drawdown y medida de agregación de valor alfa.

Es importante aclarar que aunque en el modelo COP no se asume normalidad en los retornos y no se utiliza la desviación estándar como medida de riesgo para la optimización de portafolios, para poder realizar una comparación objetiva se deben utilizar las mismas métricas de desempeño para cada uno, por lo cual se opta por usar las comúnmente aceptadas del CAPM.

Adicionalmente se hace una comparación de la asignación de activos que se obtiene de cada uno de los modelos. Los portafolios analizados son los tangenciales o los que maximizan el ratio sharpe teniendo en cuenta la no presencia de ventas en corto. Para el caso de los modelos media varianza y BL se utiliza el método de optimización de portafolios de Markowitz. Para el modelo media varianza los retornos esperados son obtenidos a partir de la media de los retornos diarios históricos.

Cabe resaltar que la literatura ha demostrado que la estimación del modelo Media Varianza a partir de los retornos históricos entrega portafolios poco diversificados por lo que no es la metodología adecuada para su estimación y a priori se esperaría que una estimación de este tipo esté en desventaja frente a otros modelos. Dado que el objetivo principal de esta investigación es la de presentar el modelo COP como una ampliación al modelo de BL, el modelo de Media Varianza sólo es presentando para realizar una comparación básica y como un punto de partida simple para el análisis de los otros dos modelos.

3.1. Estimación Black Litterman

Se utiliza la metodología propuesta He et al. (2013).

Para las ponderaciones de equilibrio del mercado se replican las ponderaciones del índice COLCAP ajustado construido para cada trimestre. Se utiliza como tasa libre de riesgo la IBR (Indicador Bancario de Referencia) tomado de la página del Banco de La República.

La matriz de covarianzas se calcula a partir de los retornos diarios en el periodo *Out of Sample*.

El coeficiente de aversión al riesgo está determinado por :

$$\delta = \frac{\text{Prima de Riesgo}}{\sigma_m^2} \quad (15)$$

Como prima de riesgo se utiliza la tasa de descuento publicada por Damodaran anualmente en su página web para Colombia. La varianza del mercado se calcula a partir de la desviación diaria de los retornos del COLCAP.

Para el parámetro τ se utiliza la expresión $\tau = \frac{1}{L}$, donde L es el tamaño de la muestra.

3.2. Expresión de las visiones

Para la expresión de las visiones del inversionista sobre los retornos de los activos se sigue la metodología propuesta por He et al. (2013), donde se toma el promedio de las recomendaciones en consenso de los analistas publicadas en Bloomberg para cada acción. Se utiliza la función *EQY_REC_CONS* para las recomendaciones en consenso y la función *BEST_TARGET_PRICE* para los precios objetivos.

Las rentabilidades sobre las perspectivas son tomadas a partir de los precios actuales y los precios objetivos promedio establecidos por los analistas.

Los analistas evalúan cada compañía cuantitativamente en un rango de 1 a 5, donde se toman 3 subdivisiones para diseñar tres portafolios: Portafolio de Venta (rango $x < 3$), Portafolio Mantener-Comprar (rango $3 \leq x < 4$) y Portafolio Compra- Compra Fuerte (rango $4 \leq x \leq 5$). Las perspectivas son absolutas donde la suma de cada uno de los tres portafolios debe ser igual a 1.

La matriz P y la matriz Q en las cuales se recogen las visiones para los modelos COP y BL se construyen de la siguiente forma: para cada acción se obtiene el retorno diario esperado tomado de las recomendaciones en consenso y su evaluación cuantitativa para clasificar en uno de los tres portafolios diseñados. Ya realizada la clasificación de las acciones, su ponderación en cada portafolio está determinada por su peso en el índice *Colcap Ajustado* construido inicialmente para cada trimestre. La matriz Q que contiene el retorno esperado de cada visión es construida como un promedio ponderado de los retornos esperados de cada acción perteneciente al portafolio diseñado y su ponderación.

Para el caso Black Litterman, la matriz de covarianzas de las perspectivas está dada por la siguiente expresión:

$$\Omega = \text{diag}(P(\tau\Sigma)P^T) \quad (16)$$

Para el modelo COP se utiliza el valor de 0.5 para el nivel de confianza de cada visión c_k .

4.1. Aplicación Modelo COP

Para representar la distribución anterior del mercado compuesta por N activos se requiere un conjunto de datos de T observaciones obtenidas de la distribución multivariada que

forman el panel χ de tamaño $T \times N$ (retornos diarios del subgrupo de acciones del Colcap utilizadas para cada modelo).

El cómo obtener la distribución anterior del mercado depende de la elección del profesional. Se proponen dos métodos para estimarla:

1) Estimación mediante simulaciones Montecarlo y métodos de ajuste a una determinada copula. Los parámetros de la copula son estimados combinando la teoría de copulas y la estimación por máxima verosimilitud, siguiendo la metodología propuesta por Ronalli et al. (2000).

Se propone utilizar una copula T y se procede a encontrar sus parámetros. Para realizar una transformación de los datos a una escala de copula se estima la función de densidad acumulada utilizando una Estimación Kernel Gaussiana. Posteriormente, se procede a llevar a cabo el ajuste de la copula elegida a los datos utilizando el método de máxima verosimilitud. Cuando los parámetros son encontrados, se obtiene una muestra aleatoria de tamaño J tomada de la copula. Esta muestra aleatoria es transformada a la escala original de los datos utilizando de nuevo la Estimación Kernel Gaussiana. Hecho esto se obtiene la distribución anterior del mercado M de tamaño $J \times N$.

$$M \sim F_M \Leftrightarrow M$$

2) Asumir que los retornos de las acciones siguen una distribución T asimétrica multivariada, distribución propuesta en Meucci (2005), Azzalini y Capitanio (2003), Embrechts, Lindskog y McNeil (2003).

$$M \sim SkT(\psi, \mu, \Sigma, \alpha) \quad (17)$$

donde ψ son los grados de libertad, μ es un vector N-dimensional que representa el valor esperado, Σ es la matriz de covarianza y α es el parámetro de asimetría. Para un valor de α igual a cero, la distribución T asimétrica se convierte en una distribución T. A medida que los grados de libertad ψ disminuyan, la distribución presentará colas pesadas y alta dependencia a los eventos extremos.

Se estiman los parámetros de la distribución mediante un ajuste de los datos a la distribución T Student asimétrica multivariada mediante el método de máxima verosimilitud. Con los parámetros obtenidos, se crea una muestra aleatoria de tamaño J mediante simulaciones Monte Carlo. De esta forma, se llega a la distribución del mercado M de tamaño J x N. Estos serán los retornos de equilibrio de los que partirá el modelo COP.

El siguiente paso del modelo, es hacer una rotación de la estimación del mercado y expresarlos en las coordenadas de las visiones del inversionista, mediante la siguiente expresión:

$$V = M\bar{P}'$$

V es una matriz J x N donde cada fila es una combinación independiente extraída del mercado, expresada en las coordenadas de las visiones.

El siguiente paso es calcular la función de densidad acumulada de las visiones y la copula anterior del mercado. Se ordenan las primeras K columnas de V, se reordenan en orden ascendente y se crea un nuevo panel W donde $W_{1,k} \leq W_{2,k} \leq \dots \leq W_{J,k}$. La función de densidad acumulada anterior de las visiones es aproximada por:

$$F_k(W_{j,K}) = \frac{j}{J+1}$$

Se crea un panel C, que representa el ranking normalizado de cada entrada de V dentro de cada columna. (Si $V_{2,3}$ es la cuarta menor simulación en la columna 3, entonces $C_{2,3} = \frac{4}{J+1}$.) Las filas del panel C son la representación empírica de la copula en (12).

Las visiones pueden ser modeladas por cualquier distribución, y para este caso se utiliza la distribución normal.

Utilizando la distribución normal, las visiones pueden ser modeladas como

$$\widehat{F}_k^N(v) = \left\{ \int_{-\infty}^v \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} e^{-(v-\mu_k)^2 / (2\sigma_k^2)} \right\} \quad (18)$$

donde μ_k es el valor esperado de la visión k y σ_k es la desviación estándar de la visión k. Se propone utilizar la raíz cuadrada de los elementos de la matriz Ω usada en el modelo de Black Litterman como desviación estándar de cada visión.

Utilizando la distribución uniforme, las visiones pueden ser modeladas como

$$\widehat{F}_k^U(v) = \begin{cases} 0 & v \leq a_k \\ \frac{v - a_k}{b_k - a_k} & v \in [a_k, b_k] \\ 1 & v \geq b_k \end{cases}$$

donde $k=1, 2, \dots$, al número de visiones y $[a_k, b_k]$ es el intervalo para cada visión k .

La distribución t student asimétrica induce una estructura t asimétrica en la distribución marginal de cada visión:

$$f_k = f_{\psi, \xi_K, \Phi_{KK}, \beta_K}^{SkT} \quad (19)$$

donde

$$\xi \equiv P\mu, \quad \Phi \equiv P\Sigma P'$$

y

$$\beta \equiv \frac{\text{diag}(\Phi)^{\frac{1}{2}} \Phi^{-1} H' \alpha}{(1 + \alpha' \left(\text{diag}(\Sigma)^{-\frac{1}{2}} - H \Phi^{-1} H' \right) \alpha)^{\frac{1}{2}}} \quad (20)$$

$$H \equiv \text{diag}(\Sigma^{-\frac{1}{2}} \Sigma P'). \quad (21)$$

Las funciones de densidad de cada visión pueden ser integradas por medio de métodos numéricos eficientes, obteniendo:

$$F_k(W_{j,K}) = F_{\psi, \xi_K, \Phi_{KK}, \beta_K}^{SkT} \quad (22)$$

Aplicando técnicas de *opinion pooling* se obtiene la función de distribución acumulada posterior de cada k -ésima visión:

$$\overline{F}_k(v) \equiv (1 - c_k) F_{\psi, \xi_K, \Phi_{KK}, \beta_K}^{SkT} + c_k \widehat{F}_k^N(v) \quad (23)$$

$$\overline{F}_k(v) \equiv (1 - c_k) F_{\psi, \xi_K, \Phi_{KK}, \beta_K}^{SkT} + c_k \widehat{F}_k^U(v) \quad (24)$$

La distribución conjunta posterior de las visiones se obtiene a partir de una interpolación lineal de las respectivas funciones de densidad acumuladas:

$$\overline{F}_K \mapsto \widetilde{F}_K^{-1} \quad (25)$$

A partir de la simulación Montecarlo de la distribución anterior del mercado, de las funciones de densidad acumuladas anteriores y de las distribuciones conjuntas posteriores,

se obtiene la distribución posterior del mercado mediante la generación de escenarios utilizando simulaciones Monte Carlo:

$$\tilde{M}^{(j)} \equiv \begin{pmatrix} P \\ P^\perp \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{F_K^{-1}}(F_1(p_1 M^{(j)})) \\ \vdots \\ \widetilde{F_K^{-1}}(F_K(p_K M^{(j)})) \\ P^\perp M^{(j)} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Luego \tilde{M} es utilizado para optimización del portafolio utilizando como medida de riesgo el CVaR.

Tanto para las simulaciones de la distribución anterior del mercado como de la distribución posterior se llevan a cabo 500.000 simulaciones.

4.2. Medida de riesgo

El $VaR_\delta(X)$ está definido por $P(X \leq -VaR_\delta(X)) = \delta$, donde δ es el percentil de la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X dado que la probabilidad que dicha variable tome un valor menor que x es mayor que δ ; representa la máxima probabilidad de pérdida que el inversionista aceptará. El $CVaR_\delta$ es definido como $-E(X|X \leq -VaR_\delta(X))$, y mide el valor esperado de la cola de la distribución para valores menores que el $VaR_\delta(X)$. De acuerdo a Artzner et al. (1998) el $CVaR_\delta(X)$ es una medida coherente de riesgo mientras que el $VaR_\delta(X)$ no lo es.

El CVaR para la distribución t-student, siguiendo Giacometti et al. (2007), toma la siguiente forma:

$$CVaR_\delta(X) = \frac{\frac{\Gamma(n+1)}{2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{\sqrt{n}}{(n-1)\delta\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{VaR_\delta(X)^2}{n}\right)^{(1-n)/2} \quad (27)$$

El CVaR puede ser estimado como

$$\widehat{CVaR}_\delta(X) = \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^{[n\delta]} \left(\frac{L_{k,n}}{n} + \left(\delta - \frac{[n\delta]}{n}\right) L_{\{n\delta\}+1,n}\right) \quad (28)$$

donde $L_{1,n} \geq \dots \geq L_{n,n}$, y $[n\delta]$ es la parte entera de $n\delta$.

Para el presente ejercicio, donde no estamos partiendo de una distribución normal para los retornos de equilibrio (en el modelo COP), las colas pesadas y la asimetría juegan un papel importante en la medición del riesgo de los activos, por lo que requerimos de una medida eficiente para la estimación de la información presente en las colas. El CVaR resuelve de gran manera esta necesidad y permite una medición del riesgo más adecuada que la realizada por la matriz de varianzas y covarianzas.

4.3. Optimización de portafolio

Para la estimación de los portafolios óptimos en el modelo COP se utiliza la metodología Media-CVaR, expresada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } CVaR_{0.05}(w), \\ & \text{sujeto a } w^T \mu \geq r, \quad w^T 1 \leq 1, \quad w_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, 15. \end{aligned}$$

Los portafolios óptimos obtenidos tienen en cuenta la no normalidad del mercado, al estimar bajo presencia de asimetría y colas pesadas. La optimización se hace utilizando el resultado propuesto en Rockafeller Y Uryasev (2000) y Meucci (2005). Utilizar media varianza bajo este contexto generaría resultados sub óptimos en los portafolios.

5. Descripción de los datos y pruebas de normalidad

En la tabla 1 se presentan las estadísticas descriptivas de los retornos diarios de cada activo para el total de la muestra, periodo desde Abril 30 de 2008 a Julio 31 de 2018. Se presentan solo las acciones que para el total de la muestra (*Out-of-Sample* + *In-Sample*) tienen retornos diarios disponibles.

En la Tabla 2 se presentan pruebas de Normalidad Univariada tales como el test de Jarque Bera (JB) y la prueba de Curtosis y Asimetría. Para todas las acciones se descarta la hipótesis nula de Normalidad con un 99% de confianza teniendo en cuenta el estadístico de JB. Para la mayoría de las acciones (exceptuando Preferencial Bancolombia y Nutresa) la asimetría es estadísticamente diferente de cero. Para todas las acciones hay un exceso de Curtosis estadísticamente diferente de cero.

Como se puede ver en la Figura 1 hay una evidente presencia de colas pesadas en los retornos, confirmando lo observado en las pruebas de normalidad univariada.

En la tabla 3 se presentan dos pruebas de normalidad multivariada para los retornos analizados. En ambas pruebas se descarta que los datos sigan una distribución normal multivariada.

En la figura 2, se muestran gráficos QQPlot usando la distribución normal, los cuales permiten inferir que esta distribución no permite capturar toda la información presente en las colas de los retornos de cada una de las acciones.

Toda la evidencia presentada anteriormente, permite descartar la distribución normal para el modelamiento de los retornos de las acciones del mercado accionario colombiano y motiva a proponer la distribución T Student Asimétrica con el fin de poder capturar la presencia de colas pesadas y el sesgo presente en los rendimientos.

Tabla 1. Estadísticas Descriptivas retornos diarios.

Statistics	ECO	PFBC	SURA	NUTR	ISA	AVAL
Min.	-10.445	-9.483	-10.164	-8.440	-9.817	-11.248
1st Qu.	-0.785	-0.783	-0.578	-0.503	-0.656	-0.699
Median	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Mean	0.001	0.021	0.022	0.015	0.021	0.021
3rd Qu.	0.881	0.815	0.699	0.527	0.744	0.708
Max.	10.271	10.881	9.490	8.004	10.483	9.733
Skewness	-0.119	0.046	-0.293	-0.034	-0.248	0.169
Excess Kurtosis	4.422	4.167	5.341	4.278	4.735	6.671

Statistics	CEM	EXI	CELSIA	CORFI	BOGOTA	GRA
Min.	-10.448	-11.955	-10.283	-15.873	-9.254	-9.471
1st Qu.	-0.721	-0.677	-0.589	-0.474	-0.342	-0.730
Median	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Mean	0.018	-0.004	0.026	0.022	0.025	0.020
3rd Qu.	0.837	0.662	0.596	0.554	0.433	0.810
Max.	9.531	8.152	9.531	8.923	8.895	9.034
Skewness	-0.240	-0.122	0.292	-0.827	-0.271	-0.121
Excess Kurtosis	3.353	5.446	5.813	15.656	8.501	3.617

Tabla 2. Pruebas de Normalidad Univariada

Ticker	Prueba JB		Prueba Kurtosis para Normalidad		Prueba Asimetría para Normalidad	
	Statistic	P-Value	Statistic	P-Value	Statistic	P-Value
ECO	2274.4	0.000***	7.4224	0.00***	-0.11942	0.0135**
PFBC	2014.1	0.000***	7.1666	0.00***	0.046443	0.3115
SURA	3347.1	0.000***	8.3405	0.00***	-0.29308	0.000***
NUTR	2122.9	0.000***	7.2781	0.00***	-0.033922	0.4645
ISA	2628.1	0.000***	7.7347	0.00***	-0.24819	0.000***
AVAL	5173.7	0.000***	9.671	0.00***	0.16913	0.001***
CEM	1330.4	0.000***	6.3532	0.00***	-0.2396	0.000***
EXI	3445.6	0.000***	8.4456	0.00***	-0.12227	0.011**
CELSIA	3957.3	0.000***	8.8126	0.00***	0.292	0.000***
CORFI	2837.9	0.000***	18.656	0.00***	-0.82736	0.000***
BOGOTA	8414.1	0.000***	11.501	0.00***	-0.27063	0.000***
GRA	1523.5	0.000***	6.6167	0.00***	-0.1207	0.0065**

Tabla 3. Pruebas de Normalidad Multivariada

	Test Statistic	p-value
Anderson-Darling	inf	0.000***
Cramer-von Mises	76.80206	0.000***

Result : Data are not multivariate normal (sig.level = 0.05)

Figura 1. Box Plot retornos diarios

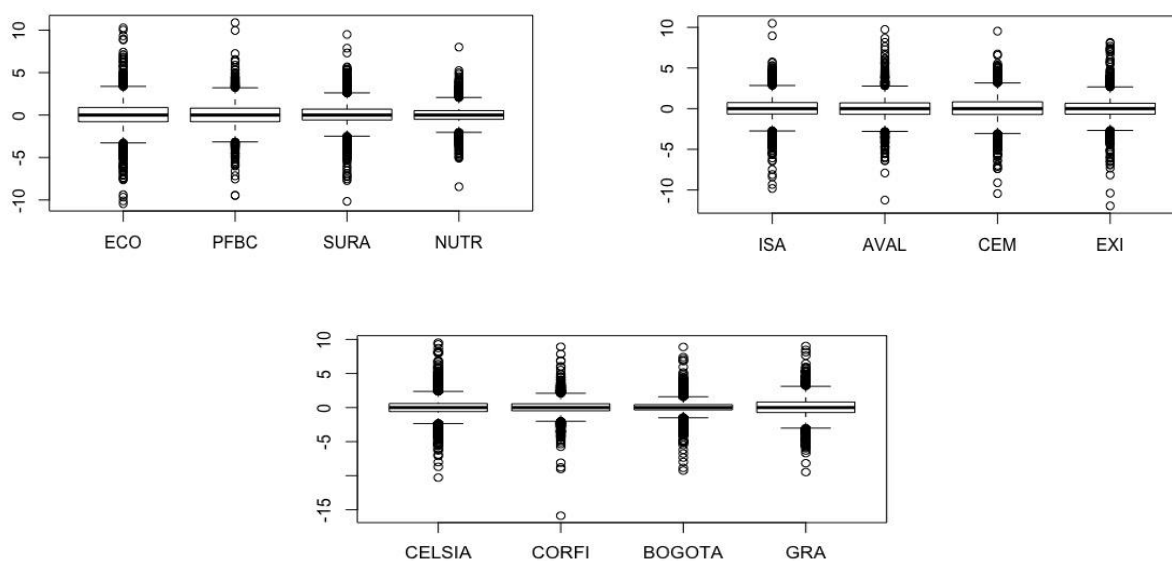
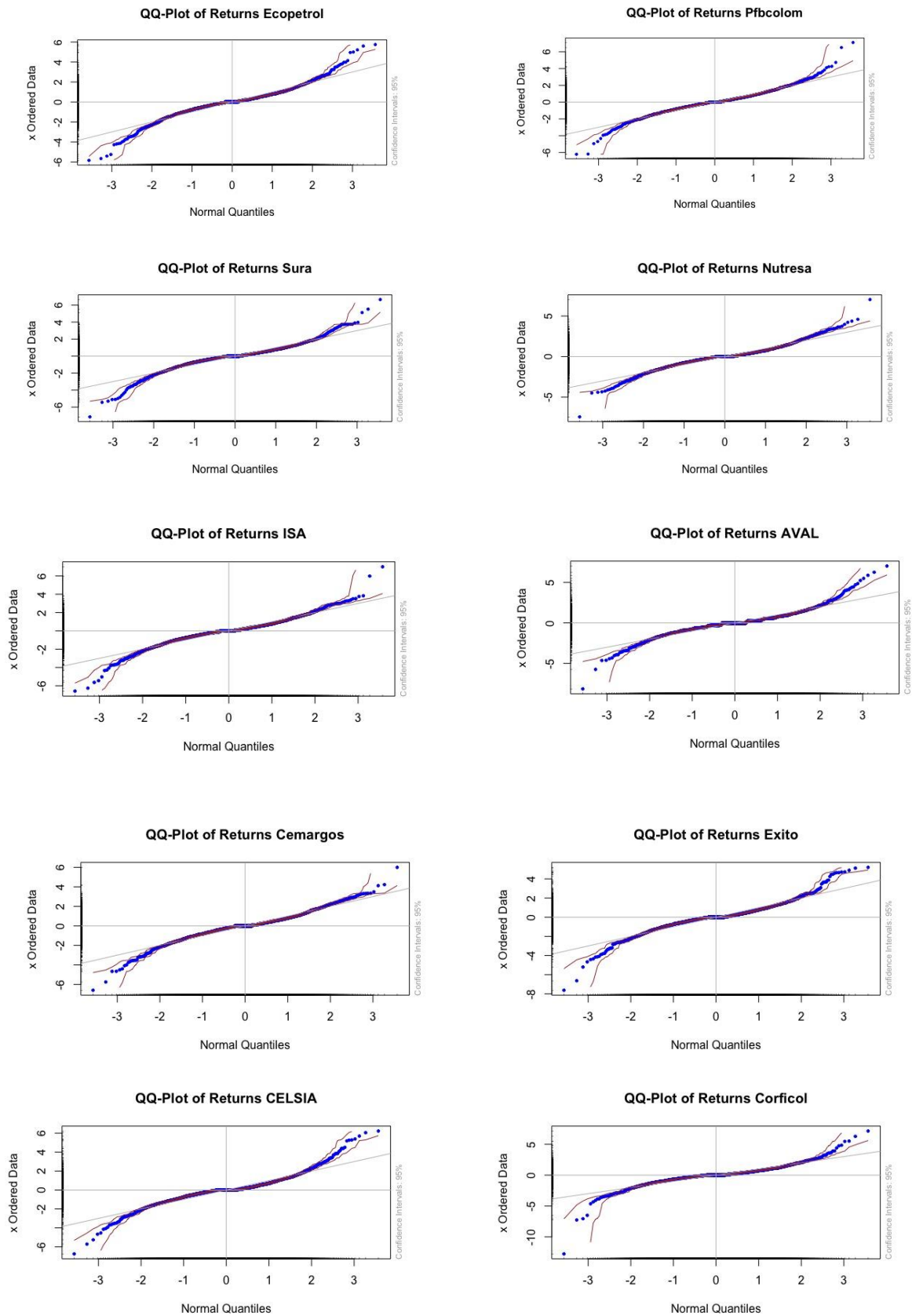


Figura 2. QQ Plot Normal Quantiles



6. Resultados

Se presentan los resultados de las estimaciones para el primer trimestre de 2013 utilizando la metodología propuesta con el fin de mostrar la intuitividad de los modelos. Los retornos y las estimaciones están expresados de forma diaria.

Expresión de las Visiones

En la Tabla 4 y Tabla 5 se muestran la matriz P y Q necesarias para la construcción de las visiones en los modelos Black Litterman y COP. En ambos modelos se utiliza la misma metodología. Estos datos son tomados de las recomendaciones en consenso publicadas en Bloomberg.

Tabla 4. Matriz P

	Matriz P												
	ECO	PFBC	SURA	NUTR	ISA	AVAL	CEM	EXI	ISAGEN	CELSIA	CORFI	BOGOTA	GRA
Portafolio Compra	0,00	0,00	0,46	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,11	0,05	0,37
Portafolio Mantener	0,00	0,42	0,00	0,23	0,15	0,12	0,00	0,00	0,00	0,08	0,00	0,00	0,00
Portafolio Venta	0,58	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,15	0,21	0,07	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabla 5. Matriz Q

	Matriz Q
Portafolio Compra	0,026%
Portafolio Mantener	0,028%
Portafolio Venta	-0,014%

Parámetros Distribución anterior del mercado (T Student Asimétrica) y retornos de equilibrio modelo COP y modelo Black- Litterman

Tabla 6. Parámetros Distribución T Student Asimétrica. $\psi(df) = 3, 13$. Retornos de equilibrio COP y distribución anterior.

Matriz μ		Skew	
ECO	0,00103	ECO	1,49E+00
PFBC	-0,00452	PFBC	-3,17E+01
SURA	-0,00051	SURA	6,53E+00
NUTR	0,00016	NUTR	-9,86E+00
ISA	-0,00028	ISA	-1,11E+00
AVAL	-0,00489	AVAL	1,36E+01
CEM	-0,00205	CEM	-1,78E+01
EXI	-0,00188	EXI	2,24E+01
ISAGEN	-0,00242	ISAGEN	1,49E+00
CELSIA	-0,00024	CELSIA	1,66E-01
CORFI	0,00141	CORFI	-1,20E+01
BOGOTA	0,00083	BOGOTA	-1,04E+01
GRA	-0,00046	GRA	-2,19E+01

Tabla 7. Matriz de retornos de equilibrio modelo Black Litterman

Matriz π	
ECO	0,00031
PFBC	0,00033
SURA	0,00036
NUTR	0,00021
ISA	0,00028
AVAL	0,00023
CEM	0,00030
EXI	0,00023
ISAGEN	0,00020
CELSIA	0,00028
CORFI	0,00018
BOGOTA	0,00012
GRA	0,00035

Como se puede observar, el efecto de las visiones sobre la distribución anterior del mercado para calcular los retornos posteriores es diferente para el modelo COP y el modelo BL, debido a que parten de unos retornos de equilibrio distintos.

Los retornos de equilibrio en el modelo COP (o la distribución anterior del mercado) están representados por la matriz M explicada en la sección 4.1. Su construcción parte de los parámetros estimados de la distribución T Student Asimétrica ajustada a los retornos de cada uno de los activos que componen el índice *Colcap Ajustado* para el trimestre de cálculo.

Para el caso del modelo Black- Litterman los retornos de equilibrio son estimados a partir de las ponderaciones por capitalización flotante de los activos en el índice *Colcap Ajustado* asumiendo que los retornos siguen una distribución normal.

Los parámetros estimados utilizando la distribución T Student Asimétrica en el modelo COP reflejan leve asimetría en los retornos y presencia de colas pesadas. Esta distribución permite recoger toda la información sobre los retornos que la distribución normal no hace.

En la Tabla 8 se muestra el resultado de la asignación de activos para cada uno de los modelos en el trimestre en particular y la ponderación de cada activo en el índice Colcap ajustado. El modelo Media Varianza no tiene en cuenta las visiones, realiza sus estimación a partir de los retornos históricos. Los portafolios óptimos estimados para el modelo Black-Litterman y el modelo COP son acordes a las perspectivas brindadas por los analistas, en tanto aumentan la ponderación en los activos con recomendación de compra y disminuyen la proporción en los de recomendación de venta.

El modelo COP asigna con mayor proporción los activos con recomendación de compra que en el modelo de Black Litterman, evidenciando la diferencia en los retornos de equilibrio de los que parten.

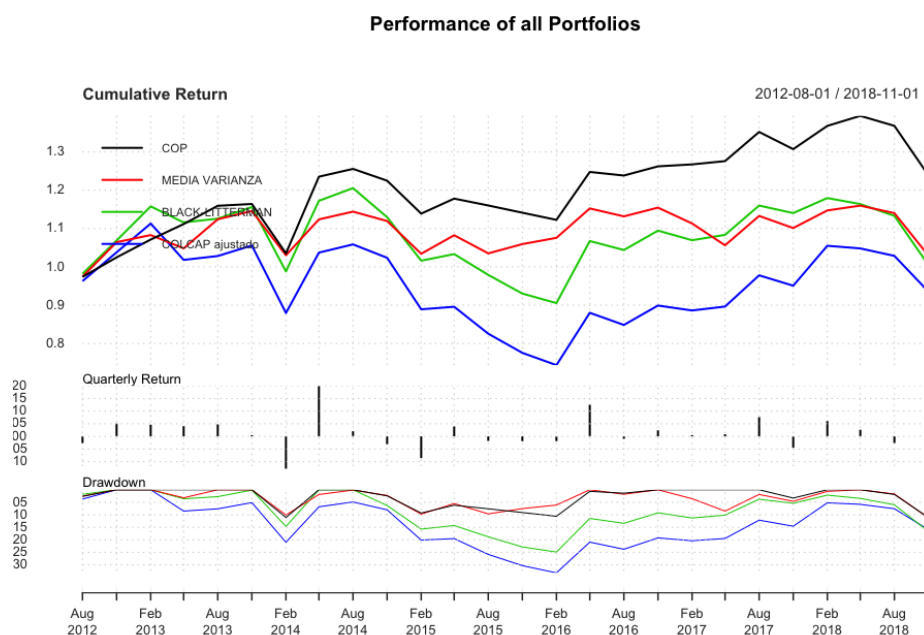
Tabla 8. Asignación de Activos

	Black-			
	COP	Litterman	Media Varianza	COLCAP
ECO	0,00%	0,00%	11,96%	20,95%
PFBC	0,00%	29,27%	0,00%	13,89%
SURA	33,36%	20,28%	0,00%	14,30%
NUTR	3,21%	14,97%	0,00%	7,51%
ISA	0,00%	7,19%	0,00%	5,01%
AVAL	2,07%	3,57%	0,79%	3,87%
CEM	0,00%	0,00%	8,60%	5,27%
EXI	9,24%	0,00%	20,84%	7,48%
ISAGEN	0,00%	0,00%	0,00%	2,59%
CELSIA	0,00%	3,91%	2,71%	2,60%
CORFI	26,70%	3,03%	30,31%	3,32%
BOGOTA	25,41%	2,19%	24,79%	1,66%
GRA	0,00%	15,59%	0,00%	11,55%

Análisis de rendimientos

Teniendo en cuenta la metodología descrita, se muestran los retornos trimestrales de cada una de las estimaciones de los portafolios para el periodo comprendido entre Abril de 2012 a Noviembre de 2018 de las acciones del mercado accionario colombiano:

Tabla 9: Resumen Rendimientos Portafolios



El periodo analizado está caracterizado por una tendencia negativa en rendimientos del índice accionario Colcap ajustado, explicada principalmente por la crisis petrolera que inició a principios del año 2014. Adicional a esto, hay que tener en cuenta que el mercado accionario colombiano experimentó rendimientos muy positivos en el periodo post crisis financiera del 2008 (2009 a 2013) donde las valoraciones fundamentales de las compañías tocaron máximos históricos, provocando que en los años posteriores se produjera toma de ganancias de los inversionistas.

Ante este escenario de retornos negativos en el mercado, es de gran interés construir un modelo de portafolios que permita tener una gestión del riesgo adecuada y que permita tener rendimientos superiores a los del mercado e incluso rendimientos positivos.

En la tabla 4 se puede observar que el modelo COP es el de mejor rendimiento y el de menor drawdown entre los demás portafolios analizados, incluyendo el índice Colcap ajustado. El drawdown está calculado como la pérdida acumulada desde el pico anterior de los retornos acumulados (pico anterior en el valor del portafolio). Puede ser entendido como la máxima pérdida que una estrategia o un portafolio puede sufrir antes de recuperarse.

En la Tabla 5 se muestran las principales métricas para la evaluación de rendimientos utilizando el criterio CAPM. Se utiliza la IBR como tasa libre de riesgo.

Tabla 10. Rendimientos vs Colcap Ajustado

	<i>COP</i>	<i>Media Varianza</i>	<i>Black-Litterman</i>
Alpha	0.0084	-0.0017	0.0023
Alpha p-value	(0.0446)*	0.417	0.203
Beta	0.7745	0.6309	0.9766
R-squared	0.76	0.7137	0.9167
Annualized Alpha	0.0342	-0.0068	0.0093
Correlation	0.8755	0.8448	0.9574
Correlation p-value	(0.00)***	(0.00)***	0.00***
Tracking Error	0.0758	0.0853	0.0463
Active Premium	0.0498	0.0197	0.0102
Information Ratio	0.6565	0.2313	0.221
Treynor Ratio	-0.0257	-0.0775	-0.0593
 Average	 0.0092	 0.0011	 0.0002
Risk Free Rate Average	0.012		
Adjusted Colcap Average	-0.007		

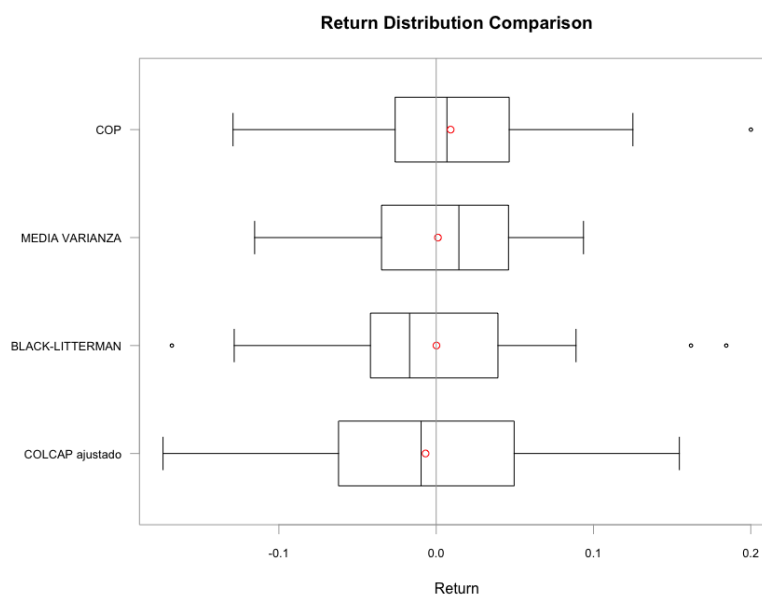
De los tres modelos analizados, el modelo COP es el que mayor medida de agregación de valor anualizada (Alfa) tiene, con un 3.42% respecto al Colcap ajustado. Siendo este valor el único estadísticamente diferente de cero entre los portafolios analizados.

Para el ratio de información, que refleja la rentabilidad adicional de los portafolios por una unidad de riesgo de desviación del índice, el portafolio COP es el que presenta el mejor ratio de los tres analizados. Esta medida indica cuánta rentabilidad extra sobre el benchmark han conseguido los portafolios teniendo en cuenta el riesgo asumido.

Analizando el R^2 , como medida de bondad de ajuste, se obtiene que el que presenta mayor valor es el portafolio de Black-Litterman. Esta medida también puede ser interpretada como de diversificación. El modelo que genera portafolios más diversificados es el de BL, explicado en su mayor parte porque se estima a partir de las ponderaciones del índice Colcap. Por el contrario, el modelo COP que parte de una distribución del mercado calculada a partir de simulaciones teniendo en cuenta el ajuste a una determinada distribución donde se recogen las principales características muestrales de los retornos y sus interacciones entre si, produce portafolios concentrados en 5 y 6 especies. Para este caso se evidenció que la poca diversificación de los portafolios obtenido con COP no afectó su rentabilidad ajustada por riesgo y al contrario fue la clave para los resultados obtenidos por encima de los del mercado y sobre los demás modelos analizados.

Esto puede explicarse desde el punto de vista del índice Colcap. Este es un índice concentrado básicamente en tres grupos Económicos que componen cerca del 90% de las ponderaciones: Grupo GEA (PFBC, SURA, NUT, CEM, CELSIA, GRA) Energía y Petróleo (ECO, ISA, EEB), y Grupo Aval (AVAL, BOGOTA, CORFI). En realidad el índice presenta poca diversificación si se tiene en cuenta que las acciones pertenecientes a cada grupo tienden a tener movimientos similares en dirección y muchas veces en magnitud. El modelo COP recoge todas estas características de los retornos y la relación entre ellos y la combina con las visiones para generar portafolios óptimos.

Figura 3. Comparación distribución de los retornos trimestrales



7. Conclusiones

Bajo la metodología propuesta para la estimación del modelo COP para el mercado accionario Colombiano en el periodo abril de 2012 a Noviembre de 2018, los portafolios obtenido a partir de esta tuvieron rendimientos considerablemente mayores a los del mercado como también a los de los portafolios estimados bajo la metodología Black-Litterman y Media Varianza.

El modelo COP permitió superar ampliamente al mercado en un periodo de tiempo con tendencia negativa en los retornos, donde recobra mayor importancia la adecuada gestión del riesgo. Al ser un modelo que permite utilizar distribuciones diferentes a la normal al adecuarse a las características muestrales de los retornos y capturar gran parte de las relaciones presentes en las colas, la gestión del riesgo y la modelación de los retornos de equilibrio se hace de una forma más objetiva traduciéndose en mayores retornos ajustados por riesgo a lo largo del tiempo.

Al igual que el modelo de Black-Litterman, el modelo COP permite combinar las perspectivas del inversionista con los retornos de equilibrio del mercado. Para este ejercicio se utilizaron las mismas perspectivas para los dos modelos. La diferencia en la asignación de activos que se obtiene de uno a otro radica en que los retornos de equilibrio de los cuales parten es diferente así como el método de optimización de los portafolios. El mayor rendimiento obtenido por el modelo COP respecto a los demás portafolios se obtiene por la estimación inicial de los retornos de equilibrio, que al incorporar asimetría y colas pesadas de acuerdo a las características de la muestra, obtiene una ventaja sobre los demás que se basan en la distribución normal. Además se hace la optimización de los portafolios bajo la metodología Media CvaR, la cual permite obtener portafolios óptimos en escenarios de presencia de colas pesadas y asimetría en los retornos.

Referencias

Artzner P., Delbaen F., Eber JM., Heath D. (1998). Coherent measures of risk. *Math Finance* 9(3), 203-228.

Azzalini, A (2005), The Skew-normal distribution and related multivariate families, *Scandinavian Journal of Statistics* 32, 159-188.

Bertocchi M., Giacometti R., Ortobelli S., Rachev S. (2005). The impact of different distributional hypotheses on returns in asset allocation. Working Paper.

Best M., Grauer R. (1991). On the Sensitivity of mean-variance efficient portfolios to changes in asset means: Some analytical and computational results. *Review of Financial Studies* 4, 315-342

Black F., Litterman R. (1992). Global Portfolio optimization. *Financ Analysis*, 28-43.

Black, F., and R. Litterman, 1990, Asset allocation: combining investor views with market equilibrium, *Goldman Sachs Fixed Income Research*

Black, Fisher, Universal Hedging: Optimizing Currency Risk and Reward in International Equity Portfolios, *Financial Analyst Journal*, pages 16-22, July-August 1989.

Campbell J., Lo A., MacKinlay A.(1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, Princeton, NJ.

Bredeby R, (2015). Analysis of Copula Opinion Pooling with Applications to Quantitative Portfolio Management. KTH Royal Institute of Technology.

Chalabi Y., Scott D., Wurtz D. 2010. The generalized lambda distribution as an alternative to model financial returns. Workin paper. Eidgenossische Technische Hochschule and University f Auckland, Zurich and Auchland.

Damodaran A. (2015). Country default spreads and risk premiums. [Http://people.stern.nyu.edu/adamodar/](http://people.stern.nyu.edu/adamodar/).

Embrechts, P., F. Lindskog, and A.J MacNeil, 2003, Modelling dependence with copulas and applications to risk management *Handbook of heavy tailed distributions in finance*.

Fama E. (1965). The behavior of stock market prices. *Journal of Business* 38, 34-105.

Giacometti, R., Bertocchi, M., Rachev, S. T., and Fabozzi, F. J. (2007). Stable distributions in the Black-Litterman approach to asset allocation. *Quantitative Finance*, 7(4):423–433.

Green R., Hollifield B. (1992). When will Mean-Variance Efficient Portfolios Be Well Diversified?. *The Journal of Finance*.

He G., Litterman R., (1999). The intuition behind Black-Litterman model portfolios. *Invest Manag*, 1-27

He, P. W., Grant, A., and Fabre, J. (2013). Economic value of analyst recommendations in Australia: an application of the Black-Litterman asset allocation model. *Accounting & Finance*, 53 (2): 441-470.

Idzorek TM. (2002). A step-by-step guide to the Black.Litterman model. Forecasting expected returns in the financial markets.

Leon C., Vela D. (2011) Foreign reserves strategic asset allocation.

Luna S., Tamayo M. (2015). Aplicación del Modelo Black-Litterman al Mercado de Renta Variable Colombiano. Working Paper. Universidad Eafit.

Mandelbrot B. (1963). New Methods in statistical economics. *Journal of Political Economy* 71, 421-440.

Mandelbrot B. (1963). The Variation of certain speculative prices. *Journal of Bussiness* 26, 394-419.

Markowitz H. (1952). Portfolio Selection. *Journal of Finance* 7(1), 77-91.

Markowitz H. (1991). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments* 2nd edn. Brasil Blackweel, Cambridge, Ma.

McNeil A., Frey R., Embrechts P. (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and tools*. Princeton University Press, Princeton, NJ.

Merton R. (1972). An analytical derivation of the efficient portfolio frontier. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 7, 1851-1872.

Meucci A. 2006. Beyond Black-Litterman in practice: A five-step recipe to input views on non-normal markets. *Risk* 19 (9), 114-119.

Meucci A. 2006. Beyond Black-Litterman: View on non-normal markets. *Risk* 19(2), 96-102.

Rachev ST., Mitnik S. (2000). *Stable Paretian Models in Finance*. Wiley.

Ramberg J., Pandu R., Dudewicz E. Mykytka E. 1979. A probability distribution and its uses in fitting data. *Technometrics* 21 (2), 201-214.

Ramberg J., Schemeiser B. 1974. An approximate method for generating asymmetric random variables. *Communications of the Association for Computing Machinery* 17, 78-82

Rockafeller Y., Uryasev S. (2000). Optimization of conditional value at risk. Risk 2(3), 21-41.

Roll R. (1977). A critique of the Asset Pricing Theory's Test. Journal of Financial Economics 4, 129-176.

Segura MET. (2009). Construcción y gestión de portafolios con el modelo black-litterman: una aplicación a los fondos de pensiones obligatorias en Colombia. PhD tesi, Uniandes

Sharpe, W. 1964. Capital asset prices: a theory of market equilibrium. Journal of Finance pp. 425-442.

Stoyanov S., Rachev ST., Samorodnitsky G., Ortobelli S. (2006). Computing the portfolio Conditional Value at Risk in the alfa stable case. Probab. Math. Stat. 26, 1-22.

Walters J. (2014) The Black Litterman Model in detail.
[Http://www.blacklitterman.org/Black-Litterman.pdf](http://www.blacklitterman.org/Black-Litterman.pdf)

